

Теоретическая информатика

Список тем и вопросов к экзамену

Элементы теории множеств

▼ Множества. Способы задания множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, дополнение, разность, симметрическая разность) и их свойства. Диаграммы Эйлера — Венна. Прямое произведение. Характеристический вектор множества. Характеристическая функция множества. Мощность множества и её связь с характеристической функцией.

Вопросы для самоконтроля: Что может выступать в качестве элементов множества? Что такое пустое множество? Что такое универсальное множество? Как выражается характеристическая функция $\chi_{A \cup B}(x)$ через $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$? Чему равна мощность $|\emptyset|$? А мощность $|\{\emptyset\}|$? Чему равна мощность $|A \times B|$? Как выглядит $A \times B$, если $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$? Что представляет собой прямое произведение множеств точек двух отрезков? Отрезка и прямоугольника? Отрезка и окружности?

▼ Подмножества. Собственные и нетривиальные подмножества.

ВдСК: Как соотносятся $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$, если $A \subseteq B$? В каком случае справедливо равенство $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_B(x)$? В чём разница между $(A \subseteq B)$ и $(A \in B)$? Какие из этих утверждений справедливы: $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$, $\emptyset \in \mathbb{N}$, $\emptyset \subseteq \emptyset$, $\emptyset \in \emptyset$? Сколько собственных подмножеств у множества мощностью 10? А сколько нетривиальных? Подмножеств какой мощности среди них больше всего?

▼ Бинарные отношения на множестве. Свойства бинарных отношений. Графы.

ВдСК: Сколько можно задать бинарных отношений на множестве мощностью n ? Сколько рефлексивных? Иррефлексивных? Симметричных? Какими свойствами обладает отношение строгого включения? Сколько существует простых графов порядка n ? А если разрешены петли?

▼ Отображения. Типы отображений. Элементарные функции как отображения. Композиция отображений. Тожественное отображение. Обратное отображение и условие его существования.

ВдСК: Сколько можно задать отображений из множества мощностью a в множество мощностью b ? А сколько биекций? Как должны соотноситься мощности конечных множеств A и B , чтобы можно было задать инъективное отображение $f: A \rightarrow B$? А сюръективное? Является ли отображение $n!: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ инъективным, сюръективным? Является ли отображение $\det \mathbf{M}: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ инъективным, сюръективным? Укажите такие множества X и Y , чтобы для отображения $\sin x: X \rightarrow Y$ существовало обратное.

▼ Подстановки на конечном множестве. Формы записи подстановки: двухэтажная, цикловая. Умножение подстановок. Порядок подстановки.

ВдСК: Коммутативно ли умножение подстановок? Как найти подстановку, обратную к данной? Сколько на множестве $\{1, 2, \dots, 8\}$ подстановок? Сколько из них переводят элемент 3 в элемент 7, а элемент 5 оставляют на месте? Сколько существует способов записать подстановку $(1\ 5\ 6)(2\ 3\ 4)(7\ 8)$ в виде произведения независимых циклов? Сколько подстановок на множестве мощностью 8 может быть представлено в виде произведения двух независимых циклов: длины 3 и 5?

▼ Принцип включения-исключения.

ВдСК: Сколько слагаемых (то есть различных мощностей) окажется в формуле включения-исключения для 10 множеств, если раскрыть все суммы?

Основные комбинаторные понятия и схемы

► Два основных правила комбинаторики: правило суммы, правило произведения.

▼ Четыре основных схемы выборки: размещение с повторениями, размещение без повторений, сочетание с повторениями, сочетание без повторений. Перестановка как частный случай размещения.

ВдСК: Может ли в формуле сочетаний без повторений верхний индекс быть больше нижнего? А в формуле сочетаний с повторениями? Сколькими способами можно разложить 20 разных шаров по шести занумерованным мешкам? А 20 одинаковых шаров? А 10 белых, 15 чёрных и 20 синих шаров?

▼ Биномиальные коэффициенты и их свойства. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Свёртка Вандермонда.

ВдСК: Чему равно C_0^0 ? Чему равен $(0!)$? При каком k , значение C_n^k максимально?

▼ Полиномиальные коэффициенты. Схема перестановки с повторениями.

ВдСК: Как раскрыть $(a + b + c + d)^3$? Сколько слагаемых в этом многочлене?

Основы теории чисел

▼ Делимость целых чисел. Остаток от деления и его свойства. Простые и составные числа. Собственные и тривиальные делители.

ВдСК: Является ли единица простым числом? Сколько чисел из диапазона $[100, 2000]$ делится на 5? А из диапазона $[-100, 2000]$?

▼ Теоремы Евклида: о бесконечности количества простых чисел; о подряд идущих составных числах; о разложении числа на простые сомножители (основная теорема арифметики).

ВдСК: Сколько делителей у числа $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$? Сколько нетривиальных?

▼ Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Взаимосвязь НОД и НОК. Взаимно простые числа. Функция Эйлера. Основное свойство НОД. Алгоритм Евклида. Расширенный алгоритм Евклида. Соотношение Безу.

ВдСК: Чему равен $\text{НОД}(0, n)$? Какими свойствами обладает отношение взаимной простоты? Есть ли разница между утверждениями « $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ » и «числа a, b, c являются попарно взаимно простыми»? Если да, то какое утверждение является более «сильным»? Верно ли, что $\text{НОД}(a, b, c) \cdot \text{НОК}(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$? Чему равна функция Эйлера $\varphi(1)$? При каких n значение $\varphi(n)$ нечётно? При каких n $\varphi(n) = 2$?

Модульная арифметика и алгебра

▼ Группа, кольцо, поле.

ВдСК: Является ли группой $\langle \mathbb{N}, + \rangle$? $\langle \mathbb{N}_0, + \rangle$? $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$? $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$? $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$? $\langle \mathbb{Q}^+, \cdot \rangle$? Что представляет собой симметрическая группа S_n ? Является ли кольцом (если да — является ли также полем) $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$? $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$? $\langle \mathbb{Q}^+, +, \cdot \rangle$? $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$?

▼ Множество (кольцо, поле) вычетов по модулю m . Арифметические операции в \mathbb{Z}_m . Нейтральный элемент (относительно сложения, умножения). Обратный элемент (по сложению, по умножению). Теорема об обратимости элемента по умножению.

ВдСК: Какие элементы входят в \mathbb{Z}_m ? Сколько элементов \mathbb{Z}_m обратимо по сложению? По умножению? А если m простое?

▼ Сравнимость чисел по модулю m . Операции над сравнениями.

ВдСК: В чём отличие сравнимости $a \equiv b \pmod{m}$ от равенства $a = b \pmod{m}$? Какими свойствами обладает отношение сравнимости? Как выглядят признаки делимости на 3, 9, 11?

▶ Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма.

▶ Сравнения первой степени, алгоритм их решения.

▶ Системы сравнений первой степени. Метод последовательной подстановки. Китайская теорема об остатках.

Системы счисления

▶ Позиционные (чистые и смешанные) и непозиционные системы счисления.

▼ Перевод целых чисел из десятичной системы в b -ричную и обратно.

ВдСК: Как записывается число b в b -ричной системе счисления?

▼ Представление дробей (обыкновенных и позиционных, конечных и периодических) в различных системах счисления.

ВдСК: Чему равно $0.(9)$?

▼ Перевод чисел между системами с основаниями b и b^k .

ВдСК: Как быстро умножить или разделить число на b^k в b -ричной системе счисления?

▶ Арифметические операции в b -ричной системе счисления.