

Информатика, 1 семестр

Тесты для проверки остаточных знаний и вопросы для самоконтроля

1. Элементы теории множеств

- 1.1. Множество. Элементы множеств. Способы задания множеств.
- 1.2. Операции над множествами и их свойства. Подмножества. Диаграммы Эйлера—Венна.
- 1.3. Характеристическая функция множества.
- 1.4. Мощность множеств.
- 1.5. Образования. Типы отображений. Элементарные функции как отображения.
- 1.6. Композиция отображений. Обратное отображение.
- 1.7. Подстановки на конечном множестве.
- 1.8. Формула включений-исключений.

- Что может выступать в качестве элементов множеств?
- Что такое пустое множество?
- Что такое универсальное множество?
- Что такое декартово произведение множеств? Приведите пример.
- Что представляет из себя прямое произведение двух отрезков, отрезка и окружности, двух окружностей, отрезка и прямоугольника?
- Как выражается характеристическая функция $\chi_{A \cap B}(x)$ через $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$?
- Как выражается мощность множества через его характеристическую функцию?
- В каком случае справедливо равенство $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_B(x)$?
- Как соотносятся $\chi_A(x)$ и $\chi_B(x)$, если $A \subseteq B$? Обоснуйте.
- Что такое отображение? Какие бывают типы отображений?
- Как должны соотноситься мощности конечных множеств A и B , чтобы можно было задать инъективное отображение $f: A \rightarrow B$?
- Как должны соотноситься мощности конечных множеств A и B , чтобы можно было задать сюръективное отображение $f: A \rightarrow B$?
- Является ли отображение $n!: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ инъективным, сюръективным?
- Когда отображение имеет обратное?
- Укажите такие множества X и Y , чтобы для отображения $\sin x: X \rightarrow Y$ существовало обратное. Постройте его.
- Коммутативно ли умножение подстановок? Приведите примеры.
- Как найти подстановку, обратную к данной?
- Чему равна мощность объединения n конечных множеств?

2. Основные комбинаторные понятия и схемы

- 2.1. Правило суммы, правило произведения.
- 2.2. Четыре основных типа выборки: размещение с повторениями, размещение без повторений, сочетание с повторениями, сочетание без повторений.
- 2.3. Приложения формулы включений-исключений.
- 2.4. Биномиальные коэффициенты, их свойства. Бином Ньютона. Свёртка Вандермонда.
- 2.5. Полиномиальные коэффициенты.

- Приведите примеры использования всех четырёх схем выборки.
- Может ли в формуле сочетаний без повторений верхний индекс быть больше нижнего? А в формуле сочетаний с повторениями?
- Как выглядит треугольник Паскаля? Каковы его свойства?
- Чему равно C_0^0 ?
- Чему равен $0!$?
- При каком k , C_n^k максимально?

- Сколькими способами можно разместить n_1 белых, n_2 черных, n_3 красных шаров по m урнам?
- Сколько перестановок из S_n начинается с 1 и заканчивается n .
- Разложить выражение $(x+y+z+t)^{10}$ на слагаемые.
- Найти коэффициент при x^8 в разложении $(1+x-x^2)^8$.
- Найти слагаемое в разложении $(1+x+6/x)^9$, не содержащее x .

3. Основы теории чисел

3.1. Делимость целых чисел. Остаток от деления. Простые числа, взаимно простые числа.

3.2. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида.

- Чему равен НОД(0, n)?
- Является ли единица простым числом?
- Есть ли разница между утверждениями «НОД(a, b, c) = 1» и «числа a, b, c являются попарно взаимно простыми»? Если да, то какое утверждение является более «сильным»?
- Верно ли, что НОД(a, b, c) · НОК(a, b, c) = abc ?
- Сколько чисел из диапазона $[1, n]$ делится на k ? ($n, k > 0$)
- Сколько чисел из диапазона $[-a, b]$ делится на k ? ($a, b, k > 0$)
- Найти число делителей числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$.

4. Модульная арифметика

4.1. Вычеты по модулю m . Сравнимость чисел по модулю m .

4.2. Арифметические операции в \mathbf{Z}_m . Обратимость по умножению. Функция Эйлера.

4.3. Расширенный алгоритм Евклида.

4.4. Сравнения первой степени.

4.5. Системы сравнений первой степени. Китайская теорема об остатках.

- Какие элементы входят в \mathbf{Z}_m ?
- Сколько элементов \mathbf{Z}_m обратимо по сложению? По умножению? А если m простое?
- Чему равна функция Эйлера $\varphi(1)$?
- Может ли $\varphi(n)$ быть нечётной? Если да, то для каких n ?
- Для каких n значение $\varphi(n)$ – нечетно?
- Для каких n значение $\varphi(n) = 2$?
- Когда сравнение $ax \equiv b \pmod{m}$ имеет решения? От чего зависит количество решений в \mathbf{Z}_m ?
- Сколько решений имеет система $x \equiv b_i \pmod{m_i}$ в \mathbf{Z}_m , если $\forall (m_i, m_j) = 1$? А в \mathbf{Z} ?

5. Системы счисления

5.1. Позиционные, непозиционные и смешанные системы счисления.

5.2. Перевод целых чисел из десятичной системы в b -ичную и обратно. Перевод между системами с основаниями b и b^k .

5.3. Перевод обыкновенных дробей из десятичной системы в b -ичную и обратно. Перевод периодических дробей.

5.4. Арифметические операции в b -ичной системе счисления. Перевод чисел из a -ичной системы в b -ичную, минуя десятичную.

- Как записывается число b в b -ичной системе счисления?
- Как быстро умножить или разделить число на b^k в b -ичной системе счисления?
- Чему равно $0.(9)$?
- Как перевести смешанную периодическую дробь из одной системы счисления в другую?
- Найти и доказать признаки делимости на 3, 9, 11.