Предисловие

Казалось бы, математика — самая точная и формализованная из всех наук. Однако даже здесь разные учёные не могут договориться о единой системе терминов и обозначений. Считать ли ноль натуральным числом? Как выделить целую часть из отрицательной дроби? Каким символом обозначается биномиальный коэффициент?

Данный «сборник неоднозначностей» является **приложением к пособию** по Теоретической информатике. Подразумевается, что читатель уже знако́м с основами комбинаторики, теории множеств и теории чисел (что такое бинарное отношение, какое отображение называют биективным, как умножаются подстановки, чем отличается размещение от сочетания, как вычислить факториал, зачем нужна функция Эйлера и т. п.) и теперь хочет прояснить некоторые неопределённости формулировок и двусмысленности терминов.

Также в документ включено несколько вопросов, ответы на которые однозначны, но неочевидны: чему равен факториал нуля, как преобразовать 0.(9) в обыкновенную дробь.

Арифметика, алгебра

Натуральные числа

Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbb{N}$, но то, какие числа в него входят, зависит от конкретного автора. Есть два мнения[1]:

а) Это целые положительные ($\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$). Тогда множество целых неотрицательных чисел можно обозначить как $\mathbb{N}_0$ («натуральные с нулём»).

б) Это целые неотрицательные ($\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$). Тогда множество целых положительных чисел можно обозначить как $\mathbb{Z}^+$.

Мы будем придерживаться варианта (а) и формулировать определения исходя из того, что ноль не относится к натуральным числам.

«Делит» и «кратно»

На множестве целых чисел имеются бинарные отношения «*d* **делит** *a*» (то есть *d* является делителем *a*) и «*k* **кратно** *a*» (то есть *k* делится нацело на *a*).

«Делит» обозначается вертикальной чертой: $2\,|\,12$, $4\,|\,12$, $12\,|\,12$, $12\,|\,0$.

«Кратно» обозначается тремя точками: $12\,\vdots\,2$, $12\,\vdots\,4$, $12\,\vdots\,12$, $0\,\vdots\,12$.

Второе воспринимается легче (естественнее), но в высшей математике первое используется чаще. Главное — не перепутать вертикальную палочку с модулем числа или мощностью множества.

НОД и НОК для нуля

Наибольший общий делитель, или НОД (greatest common divisor, GCD) целых чисел *a* и *b* — это наибольшее натуральное число, которое делит и *a*, и *b*. Обозначается $\text{НОД}(a,b)$, или просто в круглых скобках (a,b), если из контекста понятно, что это НОД, а не точка на плоскости, двухразрядный вектор или что-нибудь ещё.

$\text{НОД}(a,b)=\max\{d\in\mathbb{N}: d\,|\,a \wedge d\,|\,b\}$.

Наименьшее общее кратное, или НОК (least common multiple, LCM) целых чисел *a* и *b* — это наименьшее натуральное число, которое делится и на *a*, и на *b*. Обозначается $\text{НОК}(a,b)$, или в квадратных скобках $[a,b]$, если из контекста понятно, о чём речь.

$\text{НОК}(a,b)=\min\{k\in\mathbb{N}: a\,|\,k \wedge b\,|\,k\}$.

---

[1] Wikipedia: Natural number#Notation.

Чему равен НОД, если одно из чисел равно нулю?

Исходя из определения, получается, что $\text{НОД}(a,0)=a$.

А чему равно $\text{НОК}(a,0)$?

Есть такое свойство: $\text{НОД}(a,b)\cdot\text{НОК}(a,b)=a\cdot b$.

Подставив $b=0$, получаем $a\cdot\text{НОК}(a,0)=a\cdot 0$.

Значит, $\text{НОК}(a,0)=0$?

Но перечитаем определение: НОК — это натуральное число. А ноль — не натуральное.

Значит, $\text{НОК}(a,0)$ не существует / не определён / не имеет смысла?

На самом деле, обе версии («ноль» и «не определён») имеют право на существование. Разные математики считают по-разному[2].

Нельзя ли изменить определение и заявить, что НОК — не натуральное число, а число из $\mathbb{N}_0$?

Нет, потому что тогда ноль станет наименьшим общим кратным вообще для всех чисел. Он ведь делится на всё.

«Равно» vs «сравнимо»

«*x* **равно** *y*» ($x=y$) — это бинарное отношение, применимое к очень многим объектам в математике и означающее, что выражения x и y идентичны. Например, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$, $11^2=121$.

Можно выписывать целые цепочки равенств. Вот вычисление функции Эйлера:

$$\varphi(600)=\varphi\left(2^3\cdot 3\cdot 5^2\right)=\left(2^3-2^2\right)\cdot(3-1)\cdot\left(5^2-5^1\right)=4\cdot 2\cdot 20=160.$$

Цепочка $50 \bmod 6=(8\cdot 6+2)\bmod 6=((8\cdot 6)\bmod 6+2)\bmod 6=(0+2)\bmod 6=2$ тоже корректна, хотя и намеренно удлинена (половину вычислений можно было опустить).

«*x* **сравнимо** с *y* по модулю *m*» ($x\equiv y \pmod m$) — это бинарное отношение на множестве целых чисел, определяемое как:

---

[2] Wikipedia: Least common multiple.

а) $R_m(x) = R_m(y)$, или $(x \bmod m) = (y \bmod m)$, то есть x и y дают одинаковые остатки при делении на m.

б) $m \mid (x - y)$, то есть разность $x - y$ делится нацело на m.

в) $\exists c \in \mathbb{Z} : (x = y + c \cdot m)$, то есть x и y отличаются на величину, кратную m.

Все три формулировки эквивалентны: каждая следует из любой другой.

Пример: $50 \equiv 2 \pmod 6$, $50 \equiv -22 \pmod 6$.

И сравнимость, и равенство являются отношениями эквивалентности (они рефлексивны, симметричны и транзитивны), но смысл у них разный.

Можно записать $50 \equiv 2 \pmod 6$ — «числа 50 и 2 сравнимы по модулю 6».

Нельзя писать $50 = 2 \pmod 6$ — ведь слева от знака равенства записано число 50, а справа — число $2 \bmod 6$, то есть 2. «50 = 2» — это неправильно.

Зато можно написать $2 = 50 \pmod 6$ — «2 является результатом приведения числа 50 по модулю 6», потому что $50 \bmod 6 = 2$.

$50 \equiv -22 \pmod 6$ — всё правильно, «50 и −22 сравнимы по модулю 6».

$50 = -22 \pmod 6$ — неверно, снова получаем «50 = 2».

$50 \bmod 6 = -22 \bmod 6$ — OK, здесь записано, что «2 = 2».

Деления не существует

В математике нет операции деления. Серьёзно.

Есть две основные операции: сложение и умножение.

Когда мы производим вычитание $5 - 7$, то на самом деле складываем 5 и −7, где −7 — число, обратное к 7 по сложению (то есть при сложении с 7 даёт ноль).

Когда мы делим $5 : 7$, то, с точки зрения высшей алгебры, это умножение $5 \cdot 7^{-1}$, где 7^{-1} — число, обратное к 7 по умножению (то есть при умножении на 7 даёт единицу).

В множестве $\mathbb{R}$ все числа, кроме нуля, обратимы по умножению, поэтому в нём мы «делим» смело, не задумываясь.

В множестве $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ с операциями «сложение по модулю 5» и «умножение по модулю 5», аналогично, все элементы, кроме нуля, обратимы по умножению: $1^{-1} = 1$,

$2^{-1}=3$ (потому что $(2\cdot 3)\bmod 5=1$), $3^{-1}=2$, $4^{-1}=4$. Но всё же здесь не употребляются конструкции вида $3:4$ или $3/4$ — их заменяют выражениями $3\cdot 4^{-1}$.

А вот в множестве $\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}$ с операциями «сложение по модулю 6» и «умножение по модулю 6» не все элементы обратимы. Попробуем, например, «поделить» 3 на 4. Это означает, что нужно подобрать такое $x\in\mathbb{Z}_6$, что $3=x\cdot 4$ (здесь умножение не арифметическое, а по модулю 6), то есть $3=4\cdot x-6\cdot q$, если перейти к классической арифметике. Но, вычитая два чётных числа, мы никогда не получим нечётную тройку. Значит, в $\mathbb{Z}_6$ делить произвольные элементы друг на друга нельзя.

Среди квадратных матриц (допустим, размерности 2×2) «делить» можно на невырожденные, то есть те, у которых определитель не равен нулю. При этом — в силу некоммутативности умножения матриц — уравнения $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ и $\mathbf{XA}=\mathbf{B}$ имеют разные решения. Поэтому нельзя написать, что $\mathbf{X}=\mathbf{B}/\mathbf{A}$, как мы обычно пишем при преобразовании выражений с числами ($2x=3\Rightarrow x=3/2$). Решениями матричных уравнений будут $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ и $\mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}$, соответственно.

Подытоживая: деление на элемент — это умножение на обратный элемент (если таковой имеется).

Факториал нуля

$0!=1$. По определению. Просто потому что так удобно.

Во-первых, рекуррентное соотношение для факториала выглядит как $n!=(n-1)!\cdot n$. Например, для $n=5$: $5!=4!\cdot 5$. Подставив в соотношение $n=1$, получим, что $0!=1$.

(Почему нельзя аналогичным трюком продлить область определения до отрицательных чисел? Потому что, подставив $n=0$, получим $0!=(-1)!\cdot 0$, то есть $1=(-1)!\cdot 0$, что невозможно.)

Во-вторых, вот простая комбинаторная задача. Имеется семь карточек с цифрами от 1 до 7. Сколькими способами можно собрать из них семизначное число?

С одной стороны, речь идёт о перестановках, и ответ — $7!=5040$.

С другой стороны, можно рассматривать задачу как схему размещения без повторений (см. следующую заметку), и по формуле получается $A_7^7 = \frac{7!}{(7-7)!} = \frac{7!}{0!}$. Логично договориться, чтобы в знаменателе стояла единица, дабы не пришлось вводить никаких отдельных условий для нуля.

Убывающий и возрастающий факториал

Задача: имеется семь карточек с цифрами от 1 до 7. Сколькими способами можно собрать из них пятизначное число?

Решение: в старший разряд ставим любую из семи карточек, в следующий — любую из оставшихся шести, в третий — любую из пяти и так далее. Всего пять сомножителей: $7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$.

Как это записать покомпактнее? Домножим и разделим на $2\cdot1$. Получится $\frac{7!}{2!}$.

А можно ли это как-то обозначить? Да, в комбинаторике такая схема называется «упорядоченная выборка без возвращения», или «**размещение без повторений**», и обозначается A_7^5 (читается «а из семи по пять»). Вычисляется как $A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!}$.

А можно без привязки к комбинаторике? Да, это выражение носит название «**убывающий факториал**» (falling factorial). Обозначается $(7)_5$ или $7^{\underline{5}}$.

Если переписать множители в обратном порядке (в какой-нибудь задаче именно порядок $3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ может иметь смысл) — получим «**возрастающий факториал**» (rising factorial). Обозначается $3^{(5)}$ или $3^{\overline{5}}$.

В общем виде ($n\in\mathbb{R}$ — первый сомножитель, $k\in\mathbb{N}_0$ — их количество):

$$(n)_k = n^{\underline{k}} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \text{/*для целых } n\ge k \text{ */} \frac{n!}{(n-k)!}$$ —

убывающий факториал; в комбинаторике — A_n^k ($n\in\mathbb{N}_0$). Отметим, что $(n)_0 = n^{\underline{0}} = 1$.

$$n^{(k)} = n^{\overline{k}} = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+k-1) = \text{/*для натуральных } n \text{ */} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$$ —

возрастающий факториал. При этом $n^{(0)} = n^{\overline{0}} = 1$.

Обозначения с подчёркиванием / надчёркиванием нагляднее. Но со скобочками тоже пишут. Хотя и здесь не без неоднозначностей: когда Лео Похгаммер ввёл обозначение $(n)_k$, ныне известное как символ Похгаммера, он использовал его для биномиального коэффициента (C_n^k); уже потом учёные стали интерпретировать скобочки как убывающий факториал. (А иногда и как возрастающий — опять же, кому как понравилось[3].)

Целая часть vs округление вниз

Округление вещественного числа x до ближайшего целого в меньшую сторону, или **округление вниз** (англ. floor), — это наибольшее целое число, меньшее или равное x: $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\}$.

Округление вещественного числа x до ближайшего целого в бо́льшую сторону, или **округление вверх** (англ. ceiling), — это наименьшее целое число, большее или равное x: $\lceil x \rceil = \min\{z \in \mathbb{Z} : z \ge x\}$.

Пример: $\lfloor 2.3 \rfloor = 2$, $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lfloor -2.3 \rfloor = -3$, $\lceil -2.3 \rceil = -2$.

Теперь о **целой части** числа (integer part, integral part). Она обозначается $[x]$.

В математике **целая часть = округление вниз**. $[2.3] = 2$, $[-2.3] = -3$.

В языках программирования, увы, эта функция зачастую реализована не так, как ожидается[4], и просто отбрасывает всё, что после запятой: $\mathrm{int}(2.3) = 2$, $\mathrm{int}(-2.3) = -2$ (т. н. «округление к нулю», truncation). Этот момент нужно отслеживать и при обнаружении нестыковок писать свою функцию для нахождения целой части (или пользоваться функцией floor, если таковая имеется в языке).

Пара слов о **дробной части** (fractional part). По определению, $\{x\} = x - [x]$.

Если с положительными числами всё очевидно ($\{2.3\} = 2.3 - 2 = 0.3$), то с отрицательными получается любопытно: $\{-2.3\} = -2.3 - [-2.3] = -2.3 - (-3) = 0.7$.

Увы, и здесь не всё однозначно: по другим версиям[5], дробная часть числа −2.3 равна 0.3 или −0.3. Но мы всё же будем придерживаться классической версии: $\{-2.3\} = 0.7$.

[3] Wolfram MathWorld: Pochhammer Symbol.
[4] Википедия: Целая часть#Обозначения и примеры.
[5] Wikipedia: Fractional part#For negative numbers.

Отрицательный остаток

Если мы делим целое число *a* на целое ненулевое число *d*, то **неполное частное** определяется как

$$q = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{a}{d} \right\rfloor, d > 0, \\ \left\lceil \dfrac{a}{d} \right\rceil, d < 0, \end{cases}$$

или, что то же самое, $q = \operatorname{sgn}(d) \cdot \left\lfloor \dfrac{a}{|d|} \right\rfloor$, а **остаток** — как $r = a - q \cdot d = a - \left\lfloor \dfrac{a}{|d|} \right\rfloor \cdot |d|$.

Например:

a	d	$\operatorname{sgn}(d)$	$\left\lfloor \dfrac{a}{\lvert d\rvert} \right\rfloor$	$q = \operatorname{sgn}(d) \cdot \left\lfloor \dfrac{a}{\lvert d\rvert} \right\rfloor$	$r = a - q \cdot d$	Проверка
50	**6**	1	8	8	**2**	$50 = \underline{8} \cdot 6 + \underline{2}$
50	**−6**	-1	8	-8	**2**	$50 = \underline{-8} \cdot (-6) + \underline{2}$
−50	**6**	1	-9	-9	**4**	$-50 = \underline{-9} \cdot 6 + \underline{4}$
−50	**−6**	-1	-9	9	**4**	$-50 = \underline{9} \cdot (-6) + \underline{4}$

Как и дробная часть (см. предыдущий параграф), **остаток не может быть отрицательным**. Он лежит в пределах $0 \le r < |d|$.

В большинстве языков программирования остаток вычисляется некорректно[6]: $50 \bmod 6 = 2$, а $-50 \bmod 6 = -2$. В этом случае лучше написать свою функцию, которая делает поправку на знак: если $a \bmod d < 0$, то вернуть $a \bmod d + |d|$.

Степень нулевого многочлена

Степень многочлена определяется максимальной из степеней входящих в него одночленов.

У многочлена $x^5 - 6x^3 + 3x^2$ степень равна 5.

У многочлена $2x + 4$ степень равна 1.

У многочлена (вернее, одночлена) 4 степень равна 0 (потому что $4 \cdot x^0$).

А чему равна степень многочлена 0?

---

[6] Википедия: Деление с остатком#В программировании.

Заметим, что при перемножении многочленов степени складываются. К примеру, перемножая многочлены степеней 3 и 5, получим 8.

Пусть некий многочлен $a(x)$ имеет натуральную степень *k*. Степень нулевого многочлена обозначим за *x*. $a(x)\cdot 0=0$ — значит, $k+x=x$. Парадокс? Чтобы его разрешить, *x* принимают равным $-\infty$.

Итак, степень нулевого многочлена равна минус бесконечности.

Системы счисления

Бесконечная дробь 0.999…

Чему равна десятичная дробь $0.(63)$ — «ноль целых и шестьдесят три в периоде»?

Очевидно, что $\frac{63}{99}=\frac{7}{11}$ (исходя из правил работы с периодическими дробями).

А чему равна $0.(7)$?

Она преобразуется в $\frac{7}{9}$.

А чему равна $0.(9)$? Неужели $\frac{9}{9}=1$?

Как ни парадоксально, так и есть. И это можно доказать несколькими способами. Вот один из них.

$\lhd$ $0.999\ldots=x$ — нужно найти *x*.

Домножим обе части на 10. Для позиционной дроби это означает сдвиг запятой (aka точки) на один разряд вправо.

$9.999\ldots=10x$

Вычтем из второго уравнения первое:

$9.000\ldots=9x$

$x=1$, то есть $0.999\ldots=1$. $\rhd$

Так что примитивные калькуляторы, у которых последовательность вычислений $1:3\cdot 3$ даёт 0.9999999, не так уж и неправы.

И, кстати, подобный фокус наблюдается во всех системах счисления.

Двоичная: $(0.(1))_2=(0.111\ldots)_2=1$.

Восьмеричная: $\left(0.(7)\right)_8 = \left(0.777\ldots\right)_8 = 1.$

Шестнадцатеричная: $\left(0.(\mathrm{F})\right)_{16} = \left(0.\mathrm{FFF}\ldots\right)_{16} = 1.$

Теория множеств и комбинаторика

Включение множеств

Есть два варианта обозначения отношений нестрогого и строгого включения.

Определение	Обозначение	
	Вариант 1	Вариант 2
Множество A **[нестрого] включено** в B (является **подмножеством** множества B) $\Leftrightarrow$ $\forall x, \left(x \in A \Rightarrow x \in B\right)$.	$A \subseteq B$	$A \subset B$
Множество A **строго включено** в B (является **собственным подмножеством** B) $\Leftrightarrow$ $\forall x, \left(x \in A \Rightarrow x \in B\right) \wedge \left(A \neq B\right)$.	$A \subset B$	$A \subsetneq B$

Вариант 1 нагляднее благодаря сходству значков с символами нестрогого и строгого неравенства: $\leq$ и $<$, соответственно. Но и вариант 2 встречается в литературе[7], поэтому нужно всегда проверять, что имел в виду автор, когда писал $A \subset B$: любое подмножество или только собственное. Да, кстати, с термином «собственное подмножество» тоже есть путаница — см. следующую заметку.

Нетривиальные и собственные подмножества

Есть такой термин — «**тривиальный**» (trivial).

В определённом контексте он означает что-то вроде «дефолтный», «само собой разумеющийся».

Например, у числа 12 два тривиальных делителя: 1 и 12. А остальные делители (2, 3, 4, 6) являются нетривиальными.

У простого числа *p* два тривиальных делителя: 1 и само *p*. Нетривиальных нет.

У числа 1 один тривиальный делитель: 1. Нетривиальных нет.

Так же и с множествами.

[7] Wikipedia: Subset#⊂ and ⊃ symbols.

У множества $M=\{1,2,3,4,5\}$ два тривиальных подмножества: пустое ($\varnothing$) и оно само (M). Нетривиальных — $2^5-2=30$; среди них, например, $\{1,3,4\}$, $\{3\}$, $\{1,2,3,5\}$.

У множества, состоящего из одного элемента, два тривиальных подмножества.

У пустого множества одно тривиальное подмножество — это оно само.

Теперь о термине «**собственное подмножество**» (proper subset).

Вообще, это такое подмножество, которое не совпадает с самим множеством. То есть для множества $M=\{1,2,3,4,5\}$ само M — несобственное подмножество, а все остальные (в количестве 31 штуки) — собственные. Включая пустое множество. Такого определения придерживается, например, Wolfram MathWorld[8].

Но в некоторых пособиях[9] понятие «собственное» употребляется как синоним к «нетривиальное». Соответственно, там пустое множество не считается собственным. Возможно, неточности перевода.

Не надо смешивать эти понятия. **Нетривиальное ≠ собственное**. Если *A* — нетривиальное подмножество множества *B*, то оно точно собственное. Но из «собственности» следует нетривиальность только если *A* — не пустое множество.

Подстановка vs перестановка

Перестановка (англ. permutation) — это комбинаторная схема, отвечающая на вопрос, сколькими способами можно расставить *n* различных объектов на *n* позиций. Она является частным случаем размещения без повторений (A_n^k), когда $k=n$: $P_n=A_n^n=n!$.

Пример: сколькими способами можно раздать пять разных шоколадок пятерым детям (каждому по одной)?

Выстроим детей в ряд, пронумеруем их позиции от 1 до 5, на каждую позицию ставим объект — одну из пяти шоколадок. (Хотя можно и наоборот: шоколадки выкладываем в ряд и нумеруем от 1 до 5, к каждой подходит один из пяти детей.) Получаем $P_5=5!=120$.

[8] Wolfram Mathworld: Proper Subset.
[9] ru.math.wikia: Подмножество.

Подстановка (тоже permutation) — это биективное отображение на конечном множестве. То есть это такая функция, которая принимает аргумент из множества *M*, возвращает значение из того же *M*, причём разные элементы переходят в разные (инъективность) и в каждый элемент что-то переходит (сюръективность).

Иногда подстановку называют перестановкой, что не является ошибкой, поскольку грань между ними довольно размытая. Возвращаясь к задаче с шоколадками, можно пронумеровать детей от 1 до 5, шоколадки — тоже от 1 до 5, тогда каждая комбинаторная перестановка будет кодироваться подстановкой на множестве $\{1,2,3,4,5\}$ и наоборот: каждая из 120 подстановок на множестве $\{1,2,3,4,5\}$ будет описывать какой-то один способ раздачи шоколадок.

Порядок подстановки и перестановки

Если рассматривать **подстановку** σ как элемент симметрической группы S_n, то, с точки зрения алгебры, её **порядок** — это наименьшая натуральная степень, в которую нужно возвести σ, чтобы получить тождественную подстановку. Обозначается $\operatorname{ord}\sigma$.

Например, для $\sigma=(5\quad 0\quad 2)(1\quad 3\quad 9)(6\quad 7\quad 8\quad 4)\in S_{10}$ порядок равен $\operatorname{ord}\sigma=\text{НОК}(3,3,4)=12$.

В контексте комбинаторики термин «**порядок**» может относиться к количеству элементов множества, на котором происходит **перестановка**. Тогда любая перестановка на 10-элементном множестве имеет порядок 10. Мы не будем использовать это значение термина в силу его малоинформативности; в конце концов, всегда можно сказать «мощность множества».

Умножение подстановок

Есть такое понятие — **композиция отображений**. Сначала к элементу применяется одна функция, потом (к результату) — другая.

Например, если $f(x)=x^2$, а $g(x)=x-5$, то $g(f(x))=x^2-5$, а $f(g(x))=(x-5)^2$.

Дабы избежать вложенных скобок (особенно если функций не две, а больше), композицию обозначают кружочком: $\circ$.

И вот в чём загвоздка: в каком порядке записывать функции с кружочком?

С одной стороны, $g(f(x))$ логично переписать в виде $(g \circ f)(x)$, подразумевая, что к каждому x применяется сначала ближайшая функция, потом — та, что левее.

С другой стороны, читаем-то мы слева направо, поэтому некоторые математики[10] пишут $f \circ g$: сначала применяется первая функция, потом — вторая.

Поскольку подстановки являются частным случаем отображения, то вышеозначенная проблема композиции (кстати, применительно к подстановкам эту операцию ещё называют **умножением**) актуальна и для них.

Иными словами, когда встречаем цикловую запись $(1\quad 2)\circ(2\quad 3)$, как её трактовать? К единице сначала применяется правая скобка ($1 \to 1$), потом левая ($1 \to 2$), или же наоборот ($1 \to 2 \to 3$)?

Выход один: уточнять у автора, какой нотации он придерживается. И самим всегда оговаривать нотацию в явном виде. Можно помечать направление стрелочками:

$$\underrightarrow{(1\quad 2)\circ(2\quad 3)}=(1\quad 3\quad 2);$$

$$\underleftarrow{(1\quad 2)\circ(2\quad 3)}=(1\quad 2\quad 3).$$

Уметь умножать подстановки желательно в обоих направлениях.

Важно: внутри цикла всегда читаем элементы слева направо, независимо от стрелок! То есть запись $(1\quad 2\quad 3)$ всегда означает, что $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 1$.

Биномиальный коэффициент

Есть такая комбинаторная схема — «неупорядоченная выборка без возвращения», или «**сочетание без повторений**». Она используется, если нужно посчитать количество способов выбрать k элементов — просто выбрать, не расставлять по позициям — из множества мощностью n ($0 \le k \le n$). Обозначается как C_n^k (читается «цэ из эн по ка»). Вычисляется как $\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. (Если $k > n$, то $C_n^k = 0$.)

Альтернативная нотация: вместо C_n^k пишут $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Именно в таком порядке: сверху — мощность множества, откуда выбираем, снизу — сколько выбираем. Например, выбрать

---

[10] Wikipedia: Function composition#Alternative notations.

пять элементов из семи: $C_7^5 = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{2!} = 21$ (см. также заметку про убывающий факториал).

Мы будем использовать C_n^k, но и скобочки $\binom{n}{k}$ пугаться не нужно, если вдруг встретится в зарубежной литературе.

Заметим, что C_n^k имеет не только комбинаторный смысл. Оно активно используется в алгебре; вспомнить хотя бы бином Ньютона. Поэтому оно так и называется — **биномиальный коэффициент**. Существуют обобщения C_n^k для отрицательных n и k и даже для нецелых n (правда, k всё равно должно быть целым: $k \in \mathbb{Z}$).

Начнём с того, что, для произвольных $n \in \mathbb{R}$,

$$C_n^k = \begin{cases} \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}, k \geq 0, \\ 0, k < 0. \end{cases}$$

Пример: $C_\pi^5 = \frac{\pi\cdot(\pi-1)\cdot(\pi-2)\cdot(\pi-3)\cdot(\pi-4)}{5!}$, $C_{-\sqrt{2}}^3 = \frac{-\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}-1)\cdot(-\sqrt{2}-2)}{3!}$, $C_\pi^0 = 1$, $C_{-\sqrt{2}}^0 = 1$, $C_\pi^{-2} = 0$, $C_{-\sqrt{2}}^{-2} = 0$.

А из этой формулы вытекают все остальные.

Если n и k — целые неотрицательные ($n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$), то:

$$C_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}, k \leq n, \\ 0, k > n, \end{cases}$$

что совпадает с формулой сочетания без повторений.

Если $n \in \mathbb{Z}^-$ (целое отрицательное), а $k \in \mathbb{N}_0$, то?.. Для начала выполним преобразования на конкретных примерах:

$$C_{-5}^3 = \frac{-5\cdot -6\cdot -7}{3!} = -\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = -\frac{7!}{3!\cdot 4!} = -C_7^3;$$

$$C_{-9}^4 = \frac{-9\cdot -10\cdot -11\cdot -12}{4!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = C_{12}^4.$$

В общем виде:

$$
\begin{aligned}
C_n^k &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \\
&= \frac{-n\cdot-(n-1)\cdot-(n-2)\cdot\ldots\cdot-(n-k+1)\cdot(-1)^k}{k!} = \\
&= \frac{-n\cdot(-n+1)\cdot(-n+2)\cdot\ldots\cdot(-n+k-1)\cdot(-1)^k}{k!} = \\
&= (-1)^k\cdot\frac{(-n+k-1)\cdot\ldots\cdot(-n+2)\cdot(-n+1)\cdot-n}{k!} = (-1)^k\cdot\frac{(-n+k-1)^{\underline{k}}}{k!} = \\
&= (-1)^k\cdot\frac{(-n+k-1)!}{k!\cdot(-n-1)!} = (-1)^k\cdot C_{-n+k-1}^k = (-1)^k\cdot\hat{C}_{-n}^k,
\end{aligned}
$$

где $\hat{C}$ — **сочетание с повторениями**, или неупорядоченная выборка с возвращением. Формула $\hat{C}_n^k = (-1)^k\cdot C_{-n}^k$ работает для всех $k\in\mathbb{N}_0$ и $n\in\mathbb{R}$; при $n\in\mathbb{N}$ удобно пользоваться свойством $\hat{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$; $\hat{C}_0^0 = 1$. Альтернативные обозначения: $\bar{C}_n^k$, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Послесловие

Конечно, это далеко не полный список неоднозначностей. Только то, с чем автору довелось лично столкнуться в процессе преподавания математических дисциплин в МГТУ им. Н. Э. Баумана. Коллекция неясностей ещё будет пополняться.

Автор выражает надежду, что данный сборник оказался полезным и познавательным для изучающих математику, и благодарит читателей за внимание.