Используемые сокращения

ФВИ — формула включений-исключений, она же — принцип включения и исключения, она же — формула перекрытий. В английском языке носит название inclusion-exclusion principle.

Формулировка

ФВИ выражает мощность объединения N множеств через мощности этих множеств и их всевозможных двойных, тройных и т. д. пересечений:

$$\left|A_1 \cup \ldots \cup A_N\right| = \\ = \sum_{1\le i\le N} \left|A_i\right| - \sum_{1\le i<j\le N} \left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1\le i<j<k\le N} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots + (-1)^{N-1} \left|A_1 \cap \ldots \cap A_N\right|, \tag{1}$$

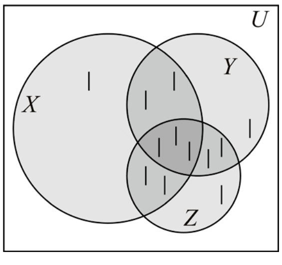
или

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_N}\right| = \\ = |U| - \sum_{1\le i\le N} \left|A_i\right| + \sum_{1\le i<j\le N} \left|A_i \cap A_j\right| - \sum_{1\le i<j<k\le N} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \ldots + (-1)^{N} \left|A_1 \cap \ldots \cap A_N\right|. \tag{2}$$

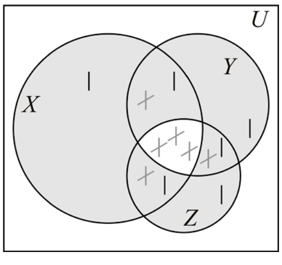
Примеры

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, или $\left|\overline{A \cup B}\right| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$;

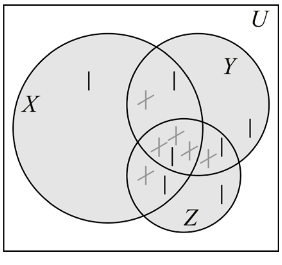
$|X \cup Y \cup Z| = \left(|X| + |Y| + |Z|\right) - \left(|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|\right) + |X \cap Y \cap Z|$ (см. рисунки);



$|X| + |Y| + |Z| \ldots$



$\ldots - \left(|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|\right) \ldots$



$\ldots + |X \cap Y \cap Z|$.

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}\right| =$$
$$= |U| - \sum_{1 \le i \le 5} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le 5} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \tag{3}$$
$$+ \sum_{1 \le i < j < k < l \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| =$$

$$= |U| -$$
$$-\left(|A_1| + \ldots + |A_5|\right) + \quad \text{// В этой скобке 5 слагаемых}$$
$$+\left(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \ldots + |A_4 \cap A_5|\right) - \quad \text{// } C_5^2 = 10 \text{ слагаемых}$$
$$-\left(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + |A_3 \cap A_4 \cap A_5|\right) + \quad \text{// } C_5^3 = 10 \text{ слагаемых}$$
$$+\left(|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \ldots + |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|\right) - \quad \text{// } C_5^4 = 5 \text{ слагаемых}$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|. \quad \text{// } C_5^5 = 1 \text{ слагаемое}$$

Обоснование (пока ещё не доказательство)

Рассмотрим формулу (3). Проверим, что правая часть равенства корректно учитывает все элементы $x \in U$.

Если x не принадлежит ни одному из множеств $A_1, \ldots, A_5$ (то есть $x \in \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}$, или, по закону де Моргана, $x \in \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}$), то он учитывается один раз в слагаемом $|U|$, а в остальных слагаемых не участвует.

Если x принадлежит ровно одному из множеств, для определённости пусть это будет A_4, то он учитывается 1 (один) раз в слагаемом $|U|$ и -1 (минус один) раз в слагаемом $|A_4|$. В остальных множествах (например, A_3 или $A_2 \cap A_4$) этого элемента нет, а значит, его вклад в их мощности равен нулю. Итого $1-1=0$ раз.

Если x принадлежит ровно двум множествам, пускай это A_2 и A_4, то он учитывается 1 (один) раз в слагаемом $|U|$, -2 (минус два) раза в $|A_2|$ и $|A_4|$, 1 (один) раз в $|A_2 \cap A_4|$ и нигде более, итого $1-2+1=0$ раз.

Если x принадлежит ровно трём множествам, допустим, A_1, A_2 и A_4, то он учитывается 1 (один) раз в $|U|$, -3 (минус три) раза в $|A_1|$, $|A_2|$ и $|A_4|$, $C_3^2 = 3$ (три) раза в двойных пересечениях (это $|A_1 \cap A_2|$, $|A_1 \cap A_4|$ и $|A_2 \cap A_4|$) и -1 (минус один) раз в

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4|$. В таких слагаемых, как $|A_3|$, $|A_5|$, $|A_1 \cap A_3|$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ и т. п., он не участвует. Итого $1-3+3-1=0$ раз. (На самом деле и здесь, и в предыдущих абзацах речь всегда идёт о биномиальных коэффициентах: $C_3^0 - C_3^1 + C_3^2 - C_3^3 = 0$.)

Аналогично, если x принадлежит четырём множествам, например, всем, кроме A_3, получим $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 0$ раз. В самом деле, для $x \in A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4 \cap A_5$:

Множества	±	**Встречаемость** x	**Индексы** A
U	+	$C_4^0 = 1$	*(неприменимо)*
$A_1, \ldots, A_5$	−	$C_4^1 = 4$	$\{1, 2, 4, 5\}$
$A_1 \cap A_2, \ldots, A_4 \cap A_5$	+	$C_4^2 = 6$	$\{12, 14, 15, 24, 25, 45\}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3, \ldots, A_3 \cap A_4 \cap A_5$	−	$C_4^3 = 4$	$\{124, 125, 145, 245\}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4, \ldots, A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$	+	$C_4^4 = 1$	$\{1245\}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$	−	0	$\{\ \}$

Наконец, если x принадлежит всем пяти множествам, то он вносит вклад во все слагаемые ФВИ: $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5 = 0$ раз.

Итак, в правой части равенства (3) элемент x учитывается один раз тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному множеству; в остальных случаях он не учитывается. Это поведение полностью соответствует левой части равенства (3).

Комбинаторное доказательство ФВИ

Если обобщить пример (3) до N множеств, доказательство получается следующим:

◀ Рассмотрим, сколько раз произвольный элемент $x \in U$ учитывается в правой части формулы (2).

Если x не принадлежит ни одному из множеств $A_1, \ldots, A_N$, то он учитывается один раз — в слагаемом $|U|$.

Если x принадлежит ровно r множествам из N, где $r = \overline{1, N}$, то он учитывается: один раз в $|U|$, $-r$ раз среди $|A_i|$, C_r^2 раз среди $|A_i \cap A_j|$, $-C_r^3$ раз среди $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ и т. д., итого $C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - C_r^3 + \ldots + (-1)^r C_r^r = 0$ раз (следствие из бинома Ньютона).

Итак, правая часть формулы (2) учитывает каждый элемент, не принадлежащий ни одному из N множеств, ровно один раз, а каждый элемент, не соответствующий этому требованию (т. е. принадлежащий хотя бы одному из множеств), — ноль раз.

Вывод: значение данного выражения действительно равно мощности множества $\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_N}$. ▶

Доказательство ФВИ через характеристические функции

См. пособие http://seizewa.ru/stuff/Zaitseva_Informatika_2010.djvu, стр. 30–32.

Компактная запись ФВИ

Начнём с того, что объединение N множеств $A_1 \cup \ldots \cup A_N$ можно переписать в формате $\bigcup\limits_{i=1}^{N} A_i$, или $\bigcup\limits_{1 \le i \le N} A_i$, или даже $\bigcup\limits_{i \in \{1,\ldots,N\}} A_i$. Аналогично, $A_1 \cap \ldots \cap A_N = \bigcap\limits_{i=1}^{N} A_i$.

Далее заметим, что в правой части формулы (1) встречаются *все* комбинации: N множеств сами по себе, все их двойные пересечения в количестве C_N^2 штук, все тройные пересечения и т. д., причём если пересекается чётное число множеств (2, 4, 6…), то мощность вычитается, а если нечётное (1, 3, 5…), то прибавляется.

Каждое слагаемое ФВИ формируется следующим образом:

- из множества $\{1,\ldots,N\}$ выбирается непустое подмножество индексов $R \subseteq \{1,\ldots,N\}$;
- множества с этими индексами пересекаются;
- берётся мощность полученного пересечения;
- знак перед мощностью определяется исходя из чётности $|R|$.

Например, подмножество индексов $\{4\}$ соответствует слагаемому $|A_4|$, а подмножество $\{1,2,4,5\}$ — слагаемому $-|A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5|$ (со знаком «минус»).

С учётом всего вышеизложенного, формула включений-исключений приводится к компактному виду:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| = \sum_{\substack{R \subseteq \{1,\ldots,N\} \\ R \ne \varnothing}} \left((-1)^{|R|-1} \cdot \left|\bigcap_{j \in R} A_j\right| \right). \tag{4}$$

Кстати, индексы R можно выбрать $C_N^1 + C_N^2 + C_N^3 + \ldots + C_N^N = 2^N - 1$ способами — именно столько слагаемых (мощностей множеств) окажется внутри суммы.