Выпишем частный случай бинома Ньютона, когда $y=1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (x+1)^n .$$

Для наглядности распишем подробнее:

$$C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n = (x+1)^n . \tag{1.1}$$

Подставим в (1.1) $x=1$:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n . \tag{1.2}$$

Подставим в (1.1) $x=-1$:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + C_n^n \cdot (-1)^n = 0 . \tag{1.3}$$

Заметим, что абсолютные значения слагаемых в (1.3) совпадают с (1.2), но в (1.3) слагаемые с чётными номерами оказались со знаком «+», а слагаемые с нечётными номерами — со знаком «–».

Сложив (1.2) и (1.3), получим

$$2 \cdot C_n^0 + 0 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + 0 \cdot C_n^3 + 2 \cdot C_n^4 + \ldots = 2^n, \text{ или}$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1} .$$

(Последним слагаемым в левой части равенства будет либо C_n^{n-1}, либо C_n^n, в зависимости от чётности числа n.)

Запишем компактнее:

$$\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_n^{2j} = 2^{n-1} . \tag{1.4}$$

Например, для $n=7$:

$$\sum_{j=0}^{3} C_7^{2j} = C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6 = 2^6 .$$

Для $n=8$:

$$\sum_{j=0}^{4} C_8^{2j} = C_8^0 + C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 + C_8^8 = 2^7 .$$

Если же вычесть из равенства (1.2) равенство (1.3), получится

$$0 \cdot C_n^0 + 2 \cdot C_n^1 + 0 \cdot C_n^2 + 2 \cdot C_n^3 + 0 \cdot C_n^4 + 2 \cdot C_n^5 + \ldots = 2^n, \text{ или}$$

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}, \text{ или}$$

$$\sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} C_n^{2j+1} = 2^{n-1}. \quad (1.5)$$

(Опять же, последнее слагаемое в левой части равенства зависит от чётности n.)

Например, для $n = 7$:

$$\sum_{j=0}^{3} C_7^{2j+1} = C_7^1 + C_7^3 + C_7^5 + C_7^7 = 2^6.$$

Для $n = 8$:

$$\sum_{j=0}^{3} C_8^{2j+1} = C_8^1 + C_8^3 + C_8^5 + C_8^7 = 2^7.$$

Замечание 1. Строго говоря, в качестве верхнего предела суммирования в формулах (1.4) и (1.5) можно было указать любое достаточно большое число, даже само n, потому что начиная с некоторого j биномиальные коэффициенты будут обнуляться и не повлияют на результат.

Замечание 2. Рассмотренный метод сложения / вычитания двух схожих биномов (будем условно называть их сопряжёнными), когда половина элементов удваивается, а половина — взаимно уничтожается, можно обобщить для произвольных $\pm x$.