Упростить выражение: $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{C_n^k}{k+2}$.

Способ 1. Преобразование факториалов

Избавляемся от счётчика в знаменателе путём преобразований.

$$\frac{C_n^k}{k+2} = \frac{n!}{(k+2)\cdot k!\cdot(n-k)!} = \frac{(k+1)\cdot n!}{(k+2)\cdot(k+1)\cdot k!\cdot(n-k)!} = \frac{(k+1)\cdot n!}{(k+2)!\cdot(n-k)!} =$$

$$= \frac{(k+1)\cdot n!}{(k+2)!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{(n+2)!}{(n+2)!} = \frac{(k+1)\cdot n!\cdot C_{n+2}^{k+2}}{(n+2)!} = \frac{(k+1)\cdot C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(k+1)\cdot C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot C_{n+2}^{k+2}. \qquad (1.1)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot C_{n+2}^{k+2}. \qquad (1.2)$$

Известно следующее свойство:

$$i\cdot C_n^i = i\cdot\frac{n!}{i!\cdot(n-i)!} = \frac{n!}{(i-1)!\cdot(n-i)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(i-1)!\cdot(n-i)!} = n\cdot C_{n-1}^{i-1}. \qquad (1.3)$$

Отсюда

$$(k+2)\cdot C_{n+2}^{k+2} = (n+2)\cdot C_{n+1}^{k+1}. \qquad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.2), имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot C_{n+2}^{k+2} = \sum_{k=0}^{n}(k+2-1)\cdot C_{n+2}^{k+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k+2)\cdot C_{n+2}^{k+2} - \sum_{k=0}^{n}1\cdot C_{n+2}^{k+2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(n+2)\cdot C_{n+1}^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}C_{n+2}^{k+2} =$$

$$= (n+2)\cdot\sum_{j=1}^{n+1}C_{n+1}^{j} - \sum_{t=2}^{n+2}C_{n+2}^{t} =$$

$$=(n+2)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n+1}C_{n+1}^{j}-C_{n+1}^{0}\right)-\left(\sum_{t=0}^{n+2}C_{n+2}^{t}-C_{n+2}^{0}-C_{n+2}^{1}\right)=$$

$$=(n+2)\cdot\left(2^{n+1}-1\right)-\left(2^{n+2}-1-(n+2)\right)=$$

$$=n\cdot 2^{n+1}+2^{n+2}-n-2-2^{n+2}+n+3=$$

$$=n\cdot 2^{n+1}+1.$$

Подставляя результат в (1.1), имеем: $\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$.

Способ 2. Интегрирование бинома Ньютона

Заметим, что $\int x^k dx=\dfrac{x^{k+1}}{k+1}+const$.

Чтобы в знаменателе получилось $k+2$, нужно увеличить степень: x^{k+1} вместо x^k.

Выпишем частный случай бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k=(x+1)^n.$$

Домножим обе части на x:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{k+1}=x\cdot(x+1)^n.$$

Проинтегрируем обе части относительно x.

С левой частью всё просто:

$$\int\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^{k+1}dx=\sum_{k=0}^{n}\int C_n^k x^{k+1}dx=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^{k+2}}{k+2}+const. \tag{2.1}$$

Правая часть: $\int x\cdot(x+1)^n\,dx$ — здесь воспользуемся интегрированием по частям, $\int udv=uv-\int vdu$, причём $u=x$, $dv=(x+1)^n\,dx$. Тогда $du=dx$, $v=\dfrac{(x+1)^{n+1}}{n+1}$.

$$\begin{aligned}\int x\cdot(x+1)^n\,dx&=x\cdot\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}-\int\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}dx=\\&=\frac{x\cdot(x+1)^{n+1}}{n+1}-\frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+const.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Приравниваем (2.1) и (2.2):

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+2}}{k+2} = \frac{x\cdot(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + K, \tag{2.3}$$

где K — константа, не зависящая от x.

Чтобы найти K, подставим в равенство (2.3) $x = 0$.

$$0 = 0 - \frac{1^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + K, \qquad K = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+2}}{k+2} = \frac{x\cdot(x+1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{2.4}$$

Подставив в (2.4) $x = 1$, имеем

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+2} = \frac{1\cdot 2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{(n+2)\cdot 2^{n+1} - 2^{n+2} + 1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n\cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}.$$

Способ 3. Преобразование дроби

Заметим, что

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + K,$$

$$\int \left(\frac{x^{k+1}}{k+1} + K \right) dx = \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + Kx + const.$$

Но здесь в знаменателе два сомножителя, а нам нужен только $k + 2$.

Воспользуемся разложением дроби на сумму простейших методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+2}$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{A\cdot(k+2) + B\cdot(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$(A+B)\cdot k+(2A+B)=1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases}$$

$$A=1, B=-1$$

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}.$$

Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}$.

Дальше возможны два пути…

А) Обходимся без всякого интегрирования.

$$\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}.$$

$$\frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{n!}{(k+2)\cdot(k+1)\cdot k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(k+2)!\cdot(n-k)!}=$$
$$=\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)(k+2)!\cdot(n-k)!}=\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+2}=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{C_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}C_{n+2}^{k+2}=$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}C_{n+1}^{j}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{t=2}^{n+2}C_{n+2}^{t}$$

Дальнейшие преобразования сводятся к тому, что было представлено в способе 1.

Б) Будем интегрировать.

Выпишем частный случай бинома Ньютона:

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k=(x+1)^n.$$

Проинтегрируем обе части относительно x.

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}+K, \qquad (3.1)$$

где K — константа, не зависящая от x.

Чтобы найти *K*, подставим в равенство (3.1) $x=0$.

$$0=\frac{1^{n+1}}{n+1}+K, \qquad K=-\frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+1}}{k+1}=\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}. \tag{3.2}$$

Во-первых, подставив в (3.2) $x=1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \tag{3.3}$$

Во-вторых, интегрируя равенство (3.2) относительно *x*, получим:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}=\frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{x}{n+1}+M, \tag{3.4}$$

где *M* — константа, не зависящая от *x*.

Чтобы найти *M*, подставим в равенство (3.4) $x=0$.

$$0=\frac{1^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-0+M, \qquad M=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}=\frac{(x+1)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{x}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{3.5}$$

Подставив в (3.5) $x=1$, получим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}. \tag{3.6}$$

Разность выражений (3.3) и (3.6) даст нам

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}-\left(\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=$$

$$=\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{(n+2)\cdot 2^{n+1}-2^{n+2}+1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}.$$